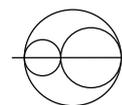


# Cercle de Mohr



## La petite histoire

Otto Mohr était un ingénieur allemand qui a mis au point plusieurs procédés de construction géométrique ramenant des problèmes spatiaux à des solutions de géométrie plane simples. Il a développé entre autre la théorie dite des « cercles de Mohr » en 1882.

## Intérêt

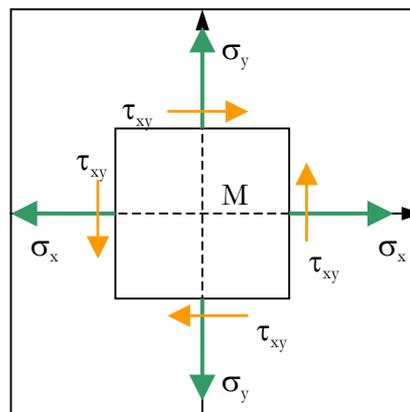
Un cercle de Mohr est un diagramme circulaire aidant dans la recherche des contraintes principales.

Il permet de visualiser les relations existantes entre les contraintes et permet de connaître simplement les contraintes dans toutes les directions en 2D en connaissant le tenseur des contraintes en un point M.

## Approche en contraintes 2D

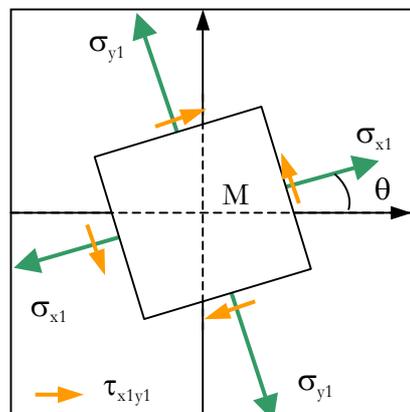
L'analyse des contraintes est faite en un point M entouré par un rectangle infinitésimal dont les côtés sont parallèles aux axes x et y (contraintes planes). Il apparaît les contraintes normales ( $\sigma_x$  et  $\sigma_y$ ) et les contraintes tangentielles  $\tau_{xy}$ . La matrice des contraintes est de la forme suivante :

$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \sigma_y \end{bmatrix}$$



En effectuant une rotation du rectangle initial dans le plan, les différentes contraintes normales et tangentielles varient en fonction de  $\theta$ . La matrice des contraintes s'écrit alors :

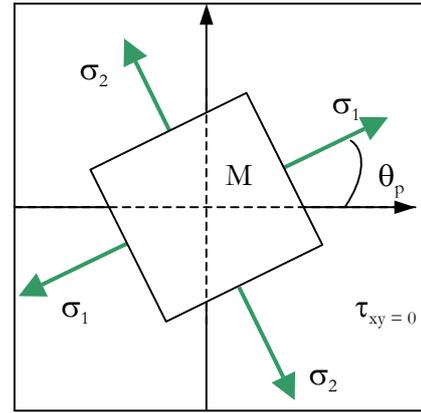
$$\tilde{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{x_1} & \tau_{x_1y_1} \\ \tau_{x_1y_1} & \sigma_{y_1} \end{bmatrix}_{(\tilde{x}_1, \tilde{y}_1)}$$



Les calculs présentés plus loin montrent que les contraintes tangentielles s'annulent pour un certain angle  $\theta = \theta_p$ . La matrice des contraintes s'écrit alors comme suit :

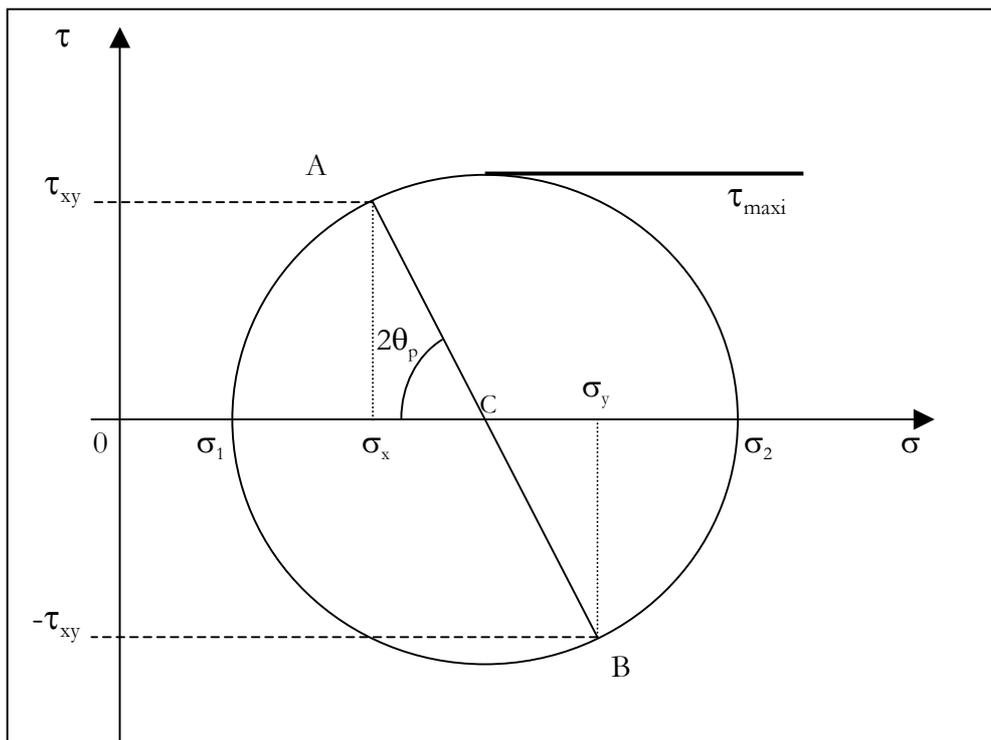
$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 \\ 0 & \sigma_2 \end{bmatrix}$$

Nous obtenons alors les contraintes principales  $\sigma_1$  et  $\sigma_2$ .



L'étude montre que les contraintes dessinées dans un diagramme  $(\tau, \sigma)$  en fonction du paramètre  $2\theta$ , forment un cercle. Cette représentation graphique permet de visualiser facilement les relations existant entre les contraintes.

Pour dessiner ce cercle, il faut placer les contraintes normales  $\sigma_x$  et  $\sigma_y$  sur les abscisses et  $\tau_{xy}$  et  $-\tau_{xy}$  sur les ordonnées, nous obtenons alors les points A et B où [AB] est le diamètre du cercle de Mohr. Le point C d'abscisse  $(\sigma_2 - \sigma_1)/2$  est le centre de ce cercle.



Pour obtenir les contraintes dans une autre direction inclinée de  $\theta$ , il suffit d'effectuer une rotation de  $2\theta$  par rapport au diamètre [AB] et de relever les différentes contraintes.

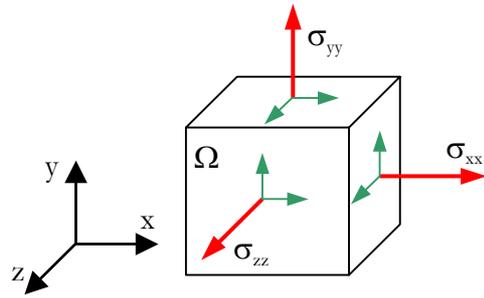
En faisant une rotation de  $2\theta_p$ , nous retrouvons la configuration en contraintes principales. L'obtention des contraintes maximales  $\sigma_2$  et  $\tau_{\max i}$  s'effectue automatiquement sur ce cercle.

Nous pouvons facilement retrouver sur le diagramme que les contraintes tangentielles maximales  $\tau_{\max i}$  se situent à  $45^\circ$  ( $2\theta = 90^\circ$ ) par rapport aux contraintes principales  $\sigma_1$  et  $\sigma_2$ .

## Approche en contraintes 3D

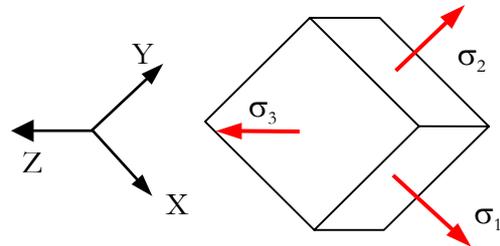
L'élément  $\Omega$  est soumis à différentes sollicitations.  
Sa matrice des contraintes est de la forme suivante :

$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{yz} & \sigma_{zz} \end{bmatrix}_{(x,y,z)}$$



Nous diagonalisons cette matrice dans le repère  $(X, Y, Z)$ .

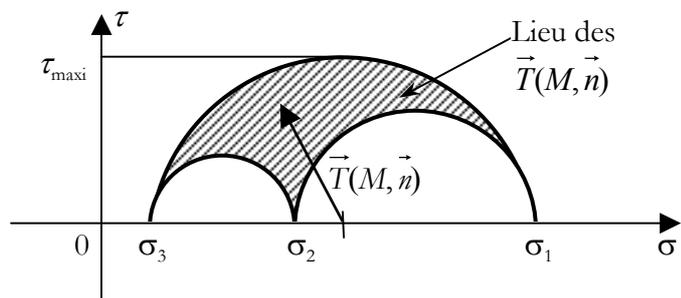
$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix}_{(X,Y,Z)} \quad \text{avec } \sigma_3 < \sigma_2 < \sigma_1$$



Ce sont les contraintes principales (ou triaxiales).  
Il n'y a plus de contraintes tangentielles.

On dessine ainsi le tricercler de Mohr en plaçant les trois contraintes principales :

$$\tau_{\max i} = \frac{1}{2} |\sigma_{\max i} - \sigma_{\min i}|$$



Tricercler de Mohr

**Pourquoi un cercle ?**

Essayons d'expliquer par le calcul pourquoi nous obtenons un cercle.

En contrainte plane, nous avons  $\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \sigma_y \end{bmatrix}_{(\bar{X}, \bar{Y})}$

Exprimons la contrainte dans un repère  $(O, \bar{X}_1, \bar{Y}_1)$  décalé d'un angle  $\theta$  par rapport au repère  $(O, \bar{X}, \bar{Y})$  donc :

$$\tilde{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{x_1} & \tau_{x_1 y_1} \\ \tau_{x_1 y_1} & \sigma_{y_1} \end{bmatrix}_{(\bar{X}_1, \bar{Y}_1)}$$

Avec  $\sigma_{x_1}(\theta) = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos(2\theta) + \tau_{xy} \cdot \sin(2\theta)$

$$\sigma_{y_1}(\theta) = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos(2\theta) - \tau_{xy} \cdot \sin(2\theta)$$

$$\tau_{x_1 y_1}(\theta) = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin(2\theta) + \tau_{xy} \cdot \cos(2\theta)$$

Cherchons la relation entre  $\sigma$  et  $\tau$ .

Nous avons, quelque soit  $\theta$ ,  $\sigma_{x_1}(\theta) = \sigma_{y_1}(\theta + \pi/2)$  donc les deux fonctions  $\sigma_{x_1}(\theta)$  et  $\sigma_{y_1}(\theta)$  sont identiques mais décalées de  $\pi/2$ . Une seule fonction suffit donc et le système s'écrit:

$$\sigma - \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos(2\theta) + \tau_{xy} \sin(2\theta)$$

$$\tau = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin(2\theta) + \tau_{xy} \cos(2\theta)$$

en éliminant  $\theta$  :

$$\left( \sigma - \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \right)^2 + \tau^2 = R^2$$

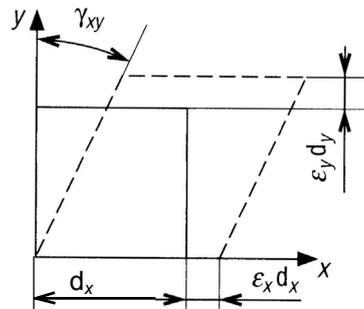
avec  $R^2 = \left( \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right)^2 + \tau_{xy}^2$

Nous obtenons donc un cercle de rayon R et de centre le point de coordonnées  $\left( \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}, 0 \right)$ .

### Approche en déformation 3D

L'approche en déformation est analogue à celle en contrainte. Les relations établies sont particulièrement utiles pour les études expérimentales utilisant des jauges de contraintes.

Cas des déformations planes : on ne prend en compte que  $\epsilon_x, \epsilon_y, \gamma_{xy}$ .

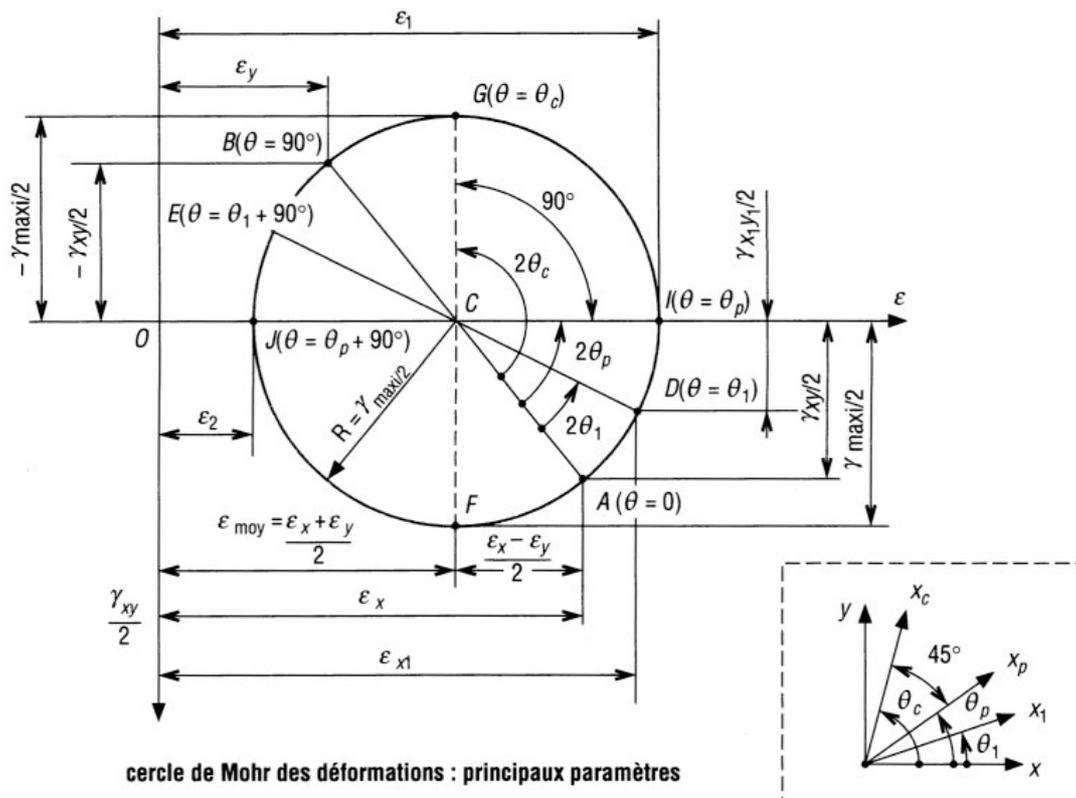


{ Glissement  $\gamma_{xy}$   
Allongement relatif  $\epsilon_x$   
Allongement relatif  $\epsilon_y$

combinaison des trois déformations  $\epsilon_x, \epsilon_y, \gamma_{xy}$

Les équations de transformations sont analogues à celles en contrainte en remplaçant :  $\begin{cases} \sigma \rightarrow \epsilon \\ \tau \rightarrow \gamma / 2 \end{cases}$

La démarche de construction du cercle est la même qu'en contrainte.



Les déformations principales apparaissent en I et J et correspondent aux points d'intersection entre le cercle et l'axe  $\epsilon$ . Pour ces points,  $\gamma_{xy} = 0$ .

Le glissement maximal apparaît en :

- G ( $\theta = \theta_p + 45^\circ$  ;  $\gamma_{xy/2} = -\gamma_{maxi/2}$ )
- F ( $\theta = \theta_p - 45^\circ$  ;  $\gamma_{xy/2} = \gamma_{maxi/2}$ ).